1/11 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (ένα προς ένα, επί, αντίστροφη, εικόνες, αντ...

$A \subseteq B \Rightarrow f(A) \subseteq f(B)$	$X \subseteq f^{-1}(f(X))$
$f(A \cup B) = f(A) \cap f(B)$	
$f(A \cup B) = f(A) \cap f(B)$ (όταν f $1-1$)	$f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$
$f(A) - f(B) \subseteq f(A-B)$ (— " —)	

⊛ f $1-1 \Leftrightarrow f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$

⊛ f επί $\Leftrightarrow f(X_A^c) \supseteq [f(X)]_B^c$

$\forall X \subseteq A, Y \subseteq B$

$f: A \to B$

ΠΡΟΤΑΣΗ: f $1-1 \Leftrightarrow f(X-Y) = f(X) - f(Y)$

f επί $\Leftrightarrow f(f^{-1}(Y)) = Y \quad \forall X \subseteq A$

f $1-1 \Leftrightarrow f^{-1}(f(X)) = X \quad \forall Y \subseteq B$

f $1-1$ κ επί $\Leftrightarrow f(X_A^c) = [f(X)]_B^c$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Ας είναι $f: A \to B$ συνάρτηση. Τότε:

f επί $\Leftrightarrow [f(X)]_B^c \subseteq f(X_A^c), \ \forall X \subseteq A$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: ($\Rightarrow$) Έστω ότι η $f: A \to B$ είναι επί. Θ.δ.ο. για $X \subseteq A$ είναι $[f(X)]_B^c \subseteq f(X_A^c)$

Ας είναι $y \in [f(X)]_B^c$. Αρκεί ν.δ.ο. $y \in f(X_A^c)$

Επειδή $y \in [f(X)]_B^c$ θα είναι $y \notin f(X)$

Δηλ. $y \neq f(x)\ \forall x \in X$. Όμως, f επί $y \in B \Rightarrow$
$\exists\, a \in A : f(a) = y$. Όμως $f(x) \neq y\ \forall x \in X$. Άρα $a \in X^c$
Συνεπώς, $y = f(a) \in f(X^c)$

($\Leftarrow$) Υποθέτω ότι ισχύει $[f(X)]^c_B \subseteq f(X^c_A)$

$\forall X \subseteq A$

Θα αποδείξω ότι η f είναι επί, δηλ. $f(A) = B$

Για $X = \emptyset \subseteq A$, θα είναι: $\underbrace{[f(\emptyset)]^c_B} \subseteq f(\emptyset^c_A)$

$B \subseteq f(A)$ (I)

Επειδή $f(A) \subseteq B$ (II) $\qquad f(A) = B$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Ας είναι $f: A \to B$ συνάρτηση
Η f είναι επί $\Leftrightarrow$ $f(f^{-1}(Y)) = Y$, $\forall Y \subseteq B$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: ($\Rightarrow$) Έστω ότι η f είναι επί. Επειδή f συνάρτηση θα είναι $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$, $\forall Y \subseteq B$
Επομένως αρκεί ν.δ.ο.: f επί $\Rightarrow Y \subseteq f(f^{-1}(Y))\ \forall Y \subseteq B$

Ας είναι $y \in Y (\neq \emptyset)$

Επειδή η f είναι επί, $\exists x \in X$, $f(x) = y$ και συνεπώς
$x \in f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(Y)$
άρα $y = f(x) \in f(f^{-1}(Y))$

Δηλ. $Y \subseteq f(f^{-1}(Y))$

($\Leftarrow$) Υποθ. ότι $f(f^{-1}(Y))$ $\forall Y \subseteq B$

Θα αποδείξω ότι f: επί

Για $Y = B$ είναι $f(\underbrace{f^{-1}(B)}_{A}) = B$

$\Rightarrow f(A) = B$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Ας είναι $\sigma \subseteq A \times B$ με $D(\sigma) = A$
Η σ είναι συνάρτηση $\Leftrightarrow$ $\sigma^{-1}(X \cap Y) = \sigma^{-1}(X) \cap \sigma^{-1}(Y)$
$\forall X, Y \in \mathcal{P}(B)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: ($\Rightarrow$) Προφανές
($\Leftarrow$) Υποθέτω ότι $x\sigma y$ κ $x \sigma z$, για $x \in A$, $y, z \in B$
$y \sigma^{-1} x$ $\quad z \sigma^{-1} x$

Για $X = \{y\}$ και $Y = \{z\}$, θα είναι: $\sigma^{-1}(\{y\} \cap \{z\}) =$
$\sigma^{-1}(\{z\}) \cap \sigma^{-1}(\{y\})$

$\sigma^{-1}(\{y\} \cap \{z\}) = \emptyset$ και

αν $y \neq z$

$x \in \sigma(\{z\})$,

$x \in \sigma^{-1}(\{y\})$,

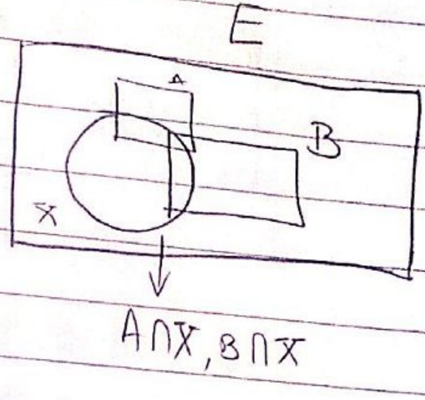
Άτοπο!

ΑΣΚΗΣΗ: Ας είναι $E \neq \emptyset$ και έστω $A, B \subseteq E$. Ορίζουμε:
$f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ με

$$f(X) = (X \cap A, X \cap B)$$

a) $f: 1-1 \iff E = A \cup B$

b) f επί $\iff A \cap B = \emptyset$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: (a) ($\Longrightarrow$) Έστω ότι $f: 1-1$ αλλά $A \cup B \neq E$

Επομένως $\exists x \in E - (A \cup B)$ τότε για $X = \{x\}$ θα είναι

$$f(X) = (\{x\} \cap A, \{x\} \cap B) = (\emptyset, \emptyset)$$

Άρα $f(\emptyset) = (\emptyset \cap A, \emptyset \cap B) = (\emptyset, \emptyset)$ δηλ $f(\{x\}) = f(\emptyset)$

με $\{x\} \neq \emptyset$ Άτοπο

($\Longleftarrow$) Υποθέτω ότι $E = A \cup B$. Θα αποδ. ότι f 1-1.
Ας είναι $X, Y \subseteq E$ με $f(X) = f(Y)$. Αρκεί ν.δ.ο $X = Y$.

Τότε $$f(X) = f(Y)$$
$$(X \cap A, X \cap B) = (Y \cap A, Y \cap B)$$

$$\Rightarrow X \cap A = Y \cap A \quad \& \quad X \cap B = Y \cap B$$

$$(X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B)$$
$$X \cap (A \cup B) = Y \cap (A \cup B)$$

$$X \cap E = Y \cap E$$

$$X = Y$$

ΑΣΚΗΣΗ: Ας είναι $\Omega \neq \phi$ βασικό σύνολο. Η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι: $A \subseteq \Omega$ ορίζεται $X_A : \Omega \to \{0,1\}$ με

$$X_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

$X_\phi = 0$

Αν $A, B \subseteq \Omega$ ν.δ.ο.

$X_{A^c} = 1 - X_A$

(α) $A = B \iff X_A = X_B$

(β) $X_{A \cap B} = X_A \cdot X_B$

(γ) $X_{A-B} = X_A - X_A \cdot X_B$

(δ) $X_{A \cup B} = X_A + X_B - X_A \cdot X_B$

(ε) $X_{A \dot{-} B} = X_A - X_B$

ΑΠΟΔ: (β) $X_{A \cap B}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \cap B \\ 0, & x \notin A \cap B \end{cases}$

Για $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B$

$\Rightarrow X_A(x) = 1 \wedge X_B(x) = 1$

δηλ. $x \in A \cap B \Rightarrow X_A(x)\, X_B(x) = X_{A \cap B}(x)$

Για $x \notin A \cap B$

θα είναι $x \notin A \vee x \notin B$

δηλ. $\chi_A(x) = 0 \vee \chi_B(x) = 0$

άρα για $x \notin A \cap B$

$\chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 0 = \chi_{A \cap B}(x)$

δηλ

Για $x \notin A \cap B \Rightarrow \chi_A(x)\, \chi_B(x) = \chi_{A \cap B}(x)$

γ) $\chi_{A-B} = \chi_{A \cap B^c} = \chi_A \chi_{B^c} = \chi_A [1 - \chi_B] = \chi_A - \chi_A \chi_B$

δ) $\chi_{A \cup B} = \chi_{(A^c \cup B^c)^c} = \ldots\ldots$

ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

Ας είναι $I \neq \emptyset$, $E \neq \emptyset$ και $a: I \to E$ συνάρτηση. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης a καλείται οικογένεια.

E συλλογή συνόλων $\quad a: I \to E$ $\Big\}$ οικογένεια

$a_i = a(i)$ $\quad \{A_i, i \in I\} = \{A_i\}_{i \in I}$

$A_i \in E$

Ας είναι $\{A_i\}_{i\in I}$ οικογένεια συνόλων
Τότε $\bigcup_{i\in I} A_i = \{x : \exists\ i \in I$

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x : x \in A_i\ \forall\ i \in I\}$$

$I = \{1, 2\}$
$\{A_1, A_2\}$

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in A_1 \lor x \in A_2\}$$

$I = \mathbb{N}$
$\{A_i\}_{i\in I} = \{A_1, A_2, A_3 \dots\}$

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in A_1 \lor x \in A_2 \lor \dots\}$$
$$= \{x : \exists n \in \mathbb{N}\ x \in A_n\}$$

$$A_\nu = \left(-\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right), \nu \in \mathbb{N}$$

$$\{A_\nu, \nu \in \mathbb{N}\} = \{A_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} = \left\{\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}_{\nu\in\mathbb{N}}$$

$$\bigcap \left(-\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) = \emptyset$$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Ας είναι $\{A_i\}_{i\in I}$, $\{B_i\}_{i\in J}$ οικογένειες συνόλων

Τότε

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I\times J} (A_i \cap B_i)$$

$I = \{1,2\}$

$J = \{1\}$

$$(A_1 \cup A_2) \cap B_1 = (A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_1)$$

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (A_i \cup B_j)$$